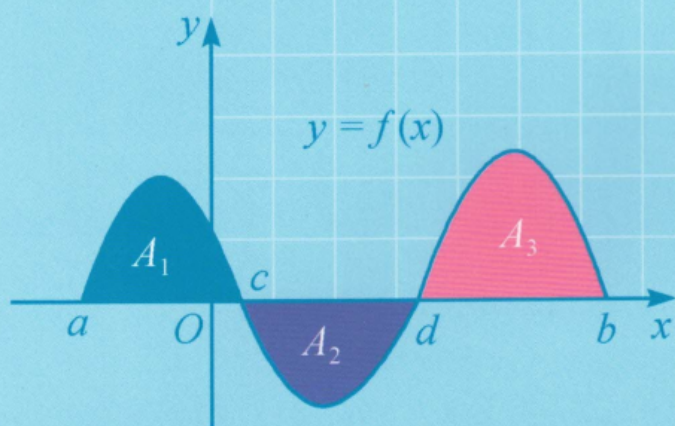




高等职业教育创新型教材



高职应用数学

梁薇 唐冰 ● 主编 (上册)



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

目 录

CONTENTS

第 1 章	数学基础知识及其应用	001
§ 1.1	三角函数与反三角函数	002
一、三角函数		002
二、反三角函数		006
三、三角函数在电学中的应用		011
习题 1.1		013
§ 1.2	幂函数、指数函数与对数函数	015
一、指数和对数		015
二、幂函数、指数函数与对数函数的概念		018
三、指数函数、对数函数在电学中的应用		019
习题 1.2		020
§ 1.3	向量及其应用	021
一、向量		021
二、向量的应用		026
习题 1.3		029
§ 1.4	复数及其应用	030
一、复数		030
二、复数的应用		038
习题 1.4		042
自测题一		044

第 2 章	函数、极限与连续	046
§ 2.1	函数	047
一、函数的概念		047
二、函数的特性		052
三、初等函数		052
习题 2.1		054
§ 2.2	函数的极限及其运算	056
一、数列的极限		056
二、函数的极限		058
三、无穷小与无穷大		060
四、极限的运算法则		062
五、两个重要极限		065
习题 2.2		066
§ 2.3	函数的连续性	067
一、函数的增量		068
二、函数连续性的定义		068
三、初等函数的连续性		070
四、闭区间上连续函数的性质		071
习题 2.3		072
§ 2.4	初等模型	073
习题 2.4		075
自测题二		076
第 3 章	微分学及其应用	078
§ 3.1	导数	079
一、案例		079
二、导数的定义		080
三、导数实际意义举例		083
四、导数的几何意义		084
习题 3.1		084
§ 3.2	函数的求导法则	085
一、函数的和、差、积、商的求导法则		085
二、基本初等函数的求导公式		087
三、复合函数的求导法则		088
习题 3.2		090
§ 3.3	隐函数的导数及高阶导数	092
一、隐函数的导数		092

二、对数求导法	093
三、高阶导数	094
习题 3.3	095
§ 3.4 函数的微分	096
一、微分的定义	096
二、微分的几何意义	098
三、微分的基本公式与运算法则	098
四、微分在近似计算中的应用	100
习题 3.4	101
§ 3.5 导数的应用	102
一、函数的单调性	102
二、曲线的凹凸性	104
三、函数的极值	106
四、函数的最值	109
五、导数的应用	112
习题 3.5	114
§ 3.6 曲线的弯曲程度——曲率	116
一、曲率的概念	116
二、曲率的计算公式	117
三、曲率圆	119
习题 3.6	119
自测题三	120
第 4 章 积分学及其应用	122
§ 4.1 定积分	123
一、案例	123
二、定积分的概念	124
三、定积分的几何意义	125
四、定积分的性质	126
习题 4.1	127
§ 4.2 微积分的基本公式	128
一、原函数和不定积分的概念	128
二、基本积分公式	130
三、不定积分的性质	130
四、微积分基本公式(牛顿—莱布尼茨公式)	132
习题 4.2	134
§ 4.3 积分方法	135

800	一、换元积分法	135
400	二、分部积分法	141
800	习题 4.3	145
800	§ 4.4 无限区间上的广义积分	147
800	习题 4.4	148
800	§ 4.5 定积分的模型及其应用	149
800	一、定积分的微元法	149
001	二、定积分的应用	150
101	习题 4.5	157
501	自测题四	158
501	第 5 章 微分方程	161
401	§ 5.1 微分方程的基本概念	162
001	习题 5.1	164
511	§ 5.2 一阶常微分方程的解法	164
111	一、可分离变量的微分方程	164
011	二、一阶线性微分方程	166
811	习题 5.2	168
711	§ 5.3 二阶常微分方程的解法	168
611	一、可降阶的二阶微分方程	169
011	二、二阶线性微分方程	170
051	习题 5.3	173
551	§ 5.4 微分方程模型	173
551	习题 5.4	179
551	自测题五	180
551	数学建模简介	182
551	数学实验一	189
551	习题答案	209
551	参考文献	227
551	附 录	228
021	附录一 常用的基本初等函数的图像和性质	228
021	附录二 常用数学公式	231
021	附录三 简易积分公式	235
021	附录四 数学家简介一	245

§ 3.1 导数

本节主要介绍导数的概念、性质和基本求导公式.下面通过两个经典实例引出导数的概念,进而得出求函数导数的方法.

一、案例

案例 1 变速直线运动的瞬时速度.

数学描述:设物体做变速直线运动,运动方程即位移与时间的函数关系为 $s = s(t)$,求物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

速度表示路程相对于时间变化的快慢程度.我们知道,若物体做匀速运动,则物体在任一时刻的运动速度为常量,且有

$$v = \frac{\text{经过的位移}}{\text{所花的时间}}.$$

当物体做变速运动时,就不能按上式计算物体在某一时刻的运动速度了.

先考虑 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内,物体的运动速度问题:在时间 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内物体经过的位移为 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$,比值 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$,称为物体在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内的平均速度.

显然, Δt 越小, $\bar{v}$ 就越趋近于 $v(t_0)$.当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,若平均速度 $\bar{v}$ 的极限存在,则此极限值就是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$,即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

案例 2 平面曲线的切线斜率.

数学描述:设曲线 C 的方程为 $y = f(x)$,求曲线 C 在点 M 处切线的斜率.

如图 3.2 所示,设 N 是曲线 C 上与点 M 邻近的一点,连接点 M 和点 N 的直线 MN 称为曲线 C 的割线.如果当点 N 沿着曲线 C 趋近于点 M 时,割线 MN 绕着点 M

转动而趋近于极限位置 MT , 这个极限位置的直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 这里, 极限位置的含义是: 只要弦长 $|MN|$ 趋近于零, $\angle NMT$ 也趋近于零.

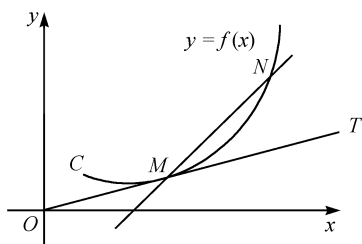


图 3.2

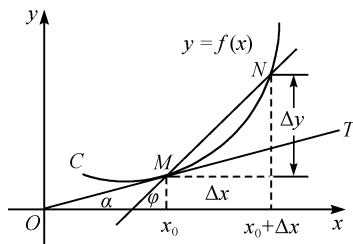


图 3.3

斜率表示直线上点的纵坐标相对于横坐标变化的快慢程度, 切线 MT 的斜率不易直接求得, 要先求割线 MN 的斜率. 如图 3.3 所示, 设点 M 、 N 的坐标分别为 (x_0, y_0) 、 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 割线 MN 的倾斜角为 φ , 切线 MT 的倾斜角为 α , 则割线 MN 的斜率为

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

显然, Δx 越小, 点 N 沿曲线 C 越趋近于点 M , 割线 MN 的斜率越趋近于切线 MT 的斜率. 当点 N 沿曲线 C 无限趋近于点 M , 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 若割线 MN 的斜率的极限存在, 则此极限值就是曲线 C 在点 M 处切线的斜率, 即

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

尽管上面两个变化率问题的实际意义不同, 但其解法是相同的, 都是先求某一区间内的平均变化率(平均速度、割线的斜率), 从而得到某点变化率的近似值, 再通过取极限, 由近似变化率过渡到精确变化率(瞬时速度、切线的斜率); 计算式子也是相同的, 都是计算同一类型的极限: 当自变量增量趋于零时, 函数增量与自变量增量之比的极限, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学、工程技术领域, 还有许多问题可以归结为求这种极限, 如速度、电流、角速度等, 我们把这种形式的极限定义为函数的极限.

二、导数的定义

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 函数有相应的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 Δy 与 Δx 之比的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处

可导,并称这个极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或变化率),记作 $f'(x_0)$,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

也可记为 $y' \big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx} \bigg|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数或导数存在.如果(3.1)式的极限不存在,就说函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导.如果不可导的原因是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$,为了方便起见,也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大,记为 $f'(x_0) = \infty$.

定义 2 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都可导,则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导.这时,对于 (a,b) 内的任意一点 x ,都有导数值 $f'(x)$ 与它对应,因此 $f'(x)$ 是 x 的函数,我们称 $f'(x)$ 为 $y=f(x)$ 的导函数,记作 $f'(x)$,即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

也可记为 y' 、 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

显然,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0) = f'(x) \big|_{x=x_0}.$$

常把导函数 $f'(x)$ 简称为导数.在求导数时,若没有指明是求某一定点的导数,都是指求导函数.

根据导数的定义求 $y=f(x)$ 的导数,一般可分为以下三个步骤:

(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

(2) 求两个增量的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

例 1 求函数 $f(x)=C$ (C 为常数) 的导数.

解 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$;

(3) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

即 $(C)' = 0$.

这就是说,常数的导数等于零.

例 2 求函数 $f(x) = x^2$ 的导数.

解 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x)^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$(3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

即 $(x^2)' = 2x$.

一般的,对于幂函数 $y = x^a (a \in \mathbf{R})$,有以下求导公式:

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

例 3 求 $y = \sin x$ 的导数.

解 (1) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$(3) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

即 $(\sin x)' = \cos x$.

同理可得 $(\cos x)' = -\sin x$.

例 4 求下列函数的导数.

$$(1) y = x^7; \quad (2) y = \sqrt{x}; \quad (3) y = \frac{1}{x^2}; \quad (4) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

解 (1) $y' = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$;

$$(2) y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(3) y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3};$$

$$(4) y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \right)' = (x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6 \sqrt[6]{x^5}}.$$

例 5 设 $f(x) = \sin x$, 求 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

解 因为 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos x \big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

GAOZHI YINGYONG SHUXUE

策划编辑 张贻松
项目负责 黄丽艳
责任编辑 黄丽艳
责任校对 陈俊海
责任技编 伍智辉
装帧设计 黄璐霜 [广大迅风艺术 ]

ISBN 978-7-5598-3052-4



9 787559 830524 >

定价: 39.00 元